REVISTA EnsinE

Que fórmula legal a da soma dos ângulos internos de um polígono convexo

What a cool formula the sum of the interior angles of a convex polygon

Leonardo de Carvalho*

Resumo: Este artigo discute o conceito de polígono convexo sob a perspectiva da Geometria Euclidiana, com ênfase na compreensão da soma de seus ângulos internos. Parte-se de uma abordagem intuitiva, amplamente utilizada em contextos escolares, baseada na decomposição de polígonos em triângulos, para então avançar na construção algébrica da expressão $S_n = (n - 2) \cdot 180º$. Por fim, recorre-se ao Princípio da Indução Matemática como ferramenta de validação formal, evidenciando como um conteúdo elementar pode ser explorado com profundidade conceitual, sem perder seu potencial didático.
Palavras-chave: Polígono convexo; Soma dos ângulos internos; Geometria Euclidiana; Decomposição triangular; Indução Matemática.

Abstract: This paper addresses the concept of convex polygons within Euclidean Geometry, focusing on the interior angle sum. The discussion begins with a geometric decomposition argument commonly employed in basic education and proceeds to an algebraic formulation of the expression $S_n = (n - 2) \cdot 180º$. The validity of the formula is then formally established through the Principle of Mathematical Induction, highlighting its suitability both for pedagogical applications and for rigorous mathematical reasoning.
Keywords: Convex polygon; Interior angle sum; Euclidean Geometry; Triangular decomposition; Mathematical Induction.

Introdução

O conceito de polígono convexo e a soma de seus ângulos internos é um tema comum em livros didáticos de todos os níveis, concursos, exames nacionais, e em olimpíadas de matemática. Presente na BNCC do Ensino Fundamental através das seguintes habilidades:

> EF06MA25 (6º Ano): Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada a figuras geométricas e explorar a soma dos ângulos internos de polígonos.

* Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Petrópolis (UCP). Pós-graduado em Metodologias do Ensino da Matemática (FAVENI). Pós-graduado em Docência do Ensino Superior (FAVENI). Mestrando do PROFMAT (Mestrado Profissional de Matemática) (PUC-RJ). Bolsista CAPES. Professor CAUCP – Colégio de Aplicação da UCP. E-mail: leonardo.carvalho@ucp.br

> EF07MA24 (7º Ano): Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
> EF07MA27 (7º Ano): Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

Sua construção lógica chega ser fascinante e merece ser revisitada, mesmo por quem já a conhece. Neste trabalho, definiremos o polígono convexo, apresentaremos uma tática inteligente e até empregada em salas de aula para se obter a soma de seus ângulos internos, identificaremos o padrão geométrico envolvido escrevendo a expressão algébrica que a define e, por fim, validaremos a fórmula (expressão algébrica) através da indução matemática, consolidando a elegância dessa expressão e concluindo como é legal explorá-la.

O que é um polígono convexo?

Por definição, um polígono é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta consecutivos e conectados dois a dois. Esses segmentos formam ângulos entre si e, quando o último encontra o primeiro sem que haja cruzamento entre eles (formando uma linha fechada simples), temos um polígono.

Por exemplo:

Figura 1 - Hexágono Não-Convexo – Polígono

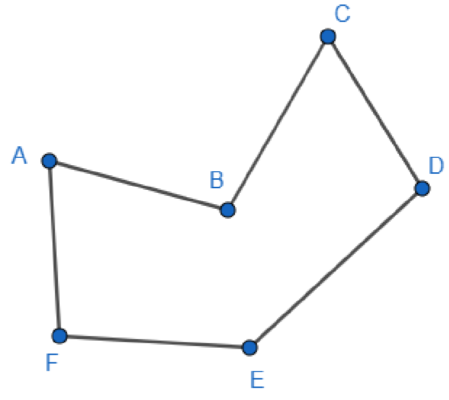
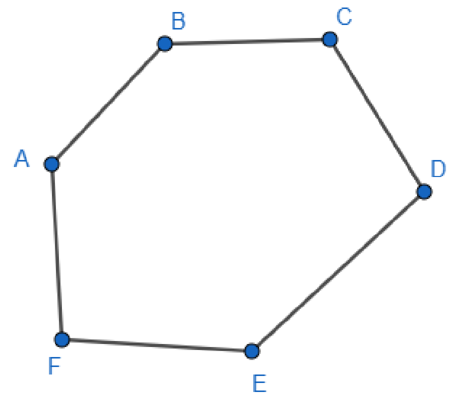


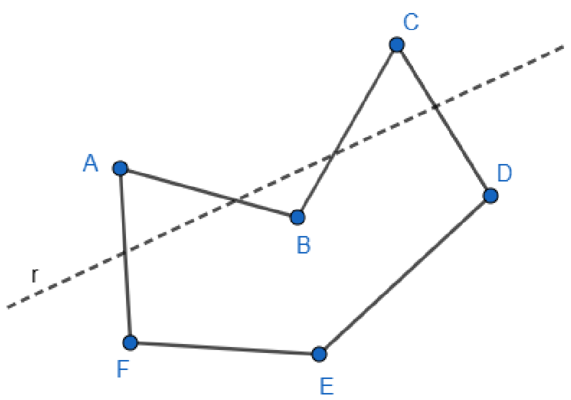
Figura 2 - Hexágono Convexo - Polígono



Nota-se uma diferença clara entre a Figura 1 e a Figura 2. Para fins didáticos, este estudo focará nos polígonos do tipo da Figura 2: os convexos.

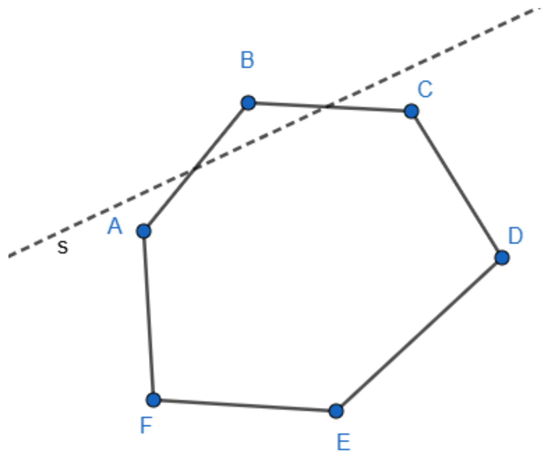
Essa diferença se encontra na construção das figuras. Um polígono é classificado como não-convexo (ou côncavo) quando possui pelo menos um ângulo interno maior do que 180°. Outra forma comum de identificá-lo é pelo método existente em livros didáticos, que consiste no famoso, para nós matemáticos, teste da reta: em um polígono côncavo, é possível traçar uma reta que, sem passar pelos vértices, atravessa o interior do polígono em mais de um trecho. Visualmente, a reta segue a sequência: região externa, interna, externa, interna e, finalmente, externa do polígono, observe a figura 3 a seguir:

Figura 3 - reta r cortando polígono não-convexo



Diferente, no polígono convexo, qualquer reta que o atravesse passará apenas uma vez pela sua região interna, seguindo a sequência: região externa, interna e externa, independente do sentido ou direção da reta, como ilustramos na figura 4 a seguir:

Figura 4 - reta s cortando polígono convexo



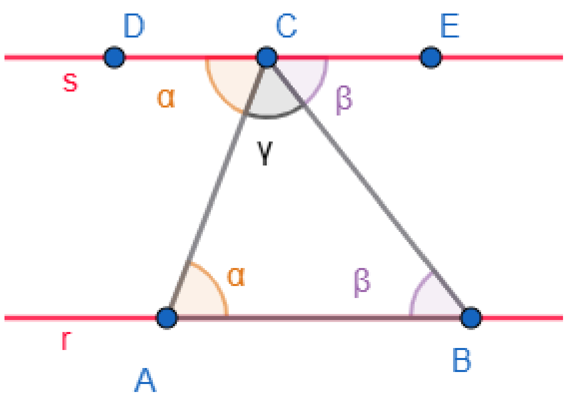
Assim, estabelecemos a distinção fundamental entre polígonos convexos e não-convexos para finalmente prosseguirmos com nossa análise e obter a fórmula legal.

Uma tática inteligente para se obter a soma dos ângulos internos de um polígono

Antes de aplicarmos a tática diretamente, vamos consolidar o conceito de que qualquer triângulo na Geometria Euclidiana possui uma soma interna de 180°. Demonstraremos isso geometricamente aplicando o Axioma de Euclides (e as propriedades de retas paralelas): Segundo Iezzi: "Se duas retas paralelas interceptam uma transversal, então os ângulos correspondentes têm medidas iguais".

Esta prova é válida para qualquer tipo de triângulo: acutângulo, retângulo ou obtusângulo, conforme demonstrado abaixo:

Figura 5 - Triângulo acutângulo



Triângulo acutângulo ABC,

retas paralelas (r / / s),

ângulos alternos internos:

$D\hat{C}A \cong C\hat{A}B = \propto$

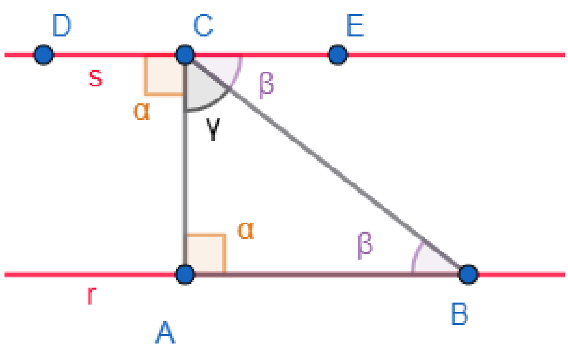
$E\hat{C}B \cong A\hat{B}C = \beta$

$A\hat{C}B = \gamma$

Somando:

$C\hat{A}B + A\hat{B}C + A\hat{C}B = \alpha + \beta + \gamma = 180°$

Figura 6 - Triângulo retângulo



Triângulo retângulo ABC,

retas paralelas (r / / s),

ângulos alternos internos:

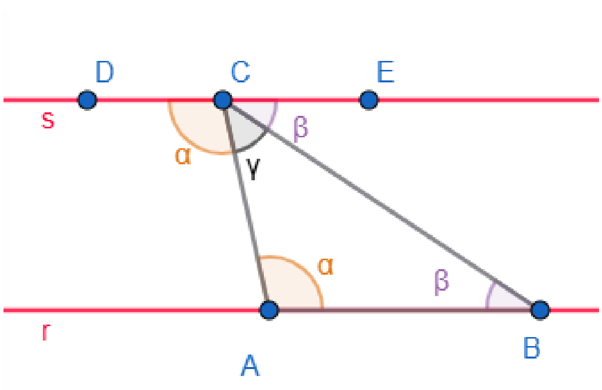
$D\hat{C}A \cong C\hat{A}B = \propto = \ 90°$

$E\hat{C}B \cong A\hat{B}C = \beta$

$A\hat{C}B = \gamma$

Somando: $C\hat{A}B + A\hat{B}C + A\hat{C}B = \alpha + \beta + \gamma = 180°$

Figura 7 - Triângulo obtusângulo



Triângulo obtusângulo ABC,

retas paralelas (r / / s),

ângulos alternos internos:

$D\hat{C}A \cong C\hat{A}B = \propto$ (obtuso)

$E\hat{C}B \cong A\hat{B}C = \beta$

$A\hat{C}B = \gamma$

Somando: $C\hat{A}B + A\hat{B}C + A\hat{C}B = \alpha + \beta + \gamma = 180°$

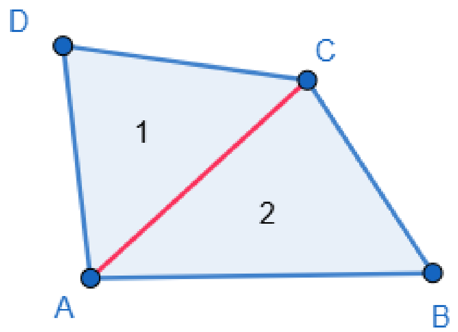
Em todos os três casos, os ângulos internos são reposicionados de forma consecutiva sobre a reta s, formando um ângulo raso. Isso prova que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.

Por que essa prova é fundamental?

Porque o triângulo é o polígono com o menor número de lados possível. Como qualquer polígono convexo (independentemente do número de lados) pode ser decomposto em triângulos vizinhos através de suas diagonais partindo de um mesmo vértice, esta prova fundamenta e assegura a tática para calcular a soma dos ângulos internos de um polígono qualquer com n lados. (Sem a fórmula consolidada já está bem legal o estudo, não acha?)

Ou seja, ao analisarmos a sequência de figuras, percebemos que é possível decompor cada polígono em triângulos, o que nos permite montar uma relação curiosa:

Figura 8 - Quadrilátero = 2 triângulos vizinhos

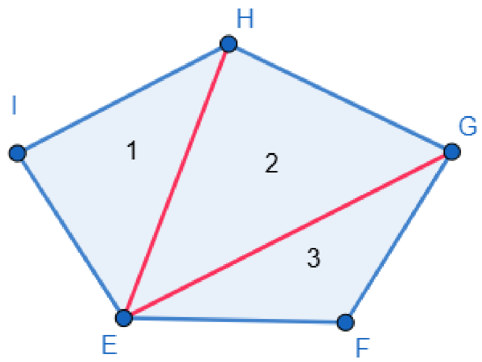


Quadriláteros convexos quaisquer, sempre formam dois triângulos a partir de uma diagonal. Logo, como cada triângulo tem 180°, dois triângulos adjacentes formam no total 360°, então concluímos que um quadrilátero tenha soma interna igual a 360°. Agora guarde:

$$4\ lados \Longrightarrow 2\ triângulos$$

$$S_4 = 360°$$

Figura 9 - Pentágono = 3 triângulos vizinhos

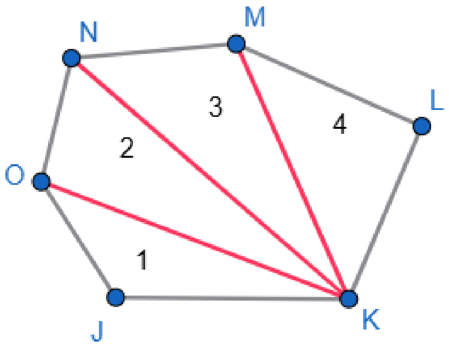


Pentágonos convexos quaisquer, sempre formam três triângulos a partir de um mesmo vértice. Logo, como cada triângulo tem 180°, três triângulos adjacentes formam no total 540°, então concluímos que um pentágono tenha soma interna igual a 540°. Observe:

$$5\ lados \Rightarrow 3\ triângulos$$

$$S_5 = 540°$$

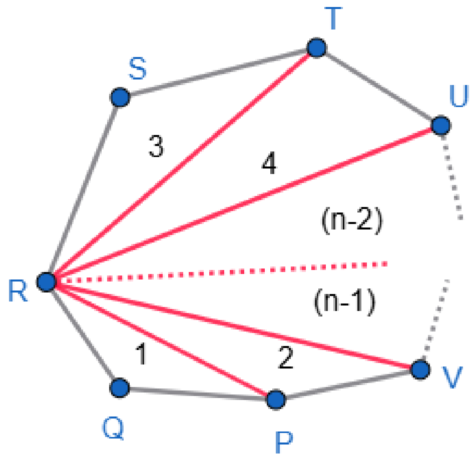
Figura 10 - Hexágono = 4 triângulos vizinhos



Hexágonos convexos quaisquer, sempre formam quatro triângulos a partir de um mesmo vértice. Logo, como cada triângulo tem 180°, quatro triângulos adjacentes formam no total 720°, então concluímos que um pentágono tenha soma interna igual a 720°. Observe:

$$6\ lados\ \Rightarrow 4\ triângulos$$

Figura 11 - Polígono de n lados = (n-2) triângulos vizinhos



Polígonos convexos quaisquer, sempre formam (n-2) triângulos a partir de um mesmo vértice. Logo, como cada triângulo tem 180°, (n-2) triângulos adjacentes formam no total de $(n-2) \cdot 180°$, então é lógico que um polígono tenha soma interna igual a S_n . Assim, concluímos:

$$n\ lados\ \Rightarrow (n-2)\ triângulos$$

Essa observação nos permite deduzir ou ao menos desconfiar que a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo seja:

$$S_n = (n-2) \cdot 180°$$

E, ao aplicarmos essa lógica aos polígonos mencionados, obtemos os seguintes resultados:

Polígono	Nº de lados	Aplicação na fórmula	Soma dos ângulos internos
Triângulo	3	$(3-2)\cdot 180°$	180°
Quadrilátero	4	$(4-2)\cdot 180°$	360°
Pentágono	5	$(5-2)\cdot 180°$	540°
Hexágono	6	$(6-2)\cdot 180°$	720°
...	...	...	...
Polígono de n lados	n	$(n-2)\cdot 180°$	S_n

Isso nos leva a uma questão fundamental, frequentemente ignorada em abordagens puramente operacionais: se alimentarmos essa tabela infinitamente, podemos garantir que a fórmula continuará sendo válida...? É uma fórmula "legal" (correta e elegante)? Posso intuir e simplesmente dar por encerrada minha investigação? A resposta é não, afinal, a matemática e a ciência merecem uma garantia, o que nos leva para uma ferramenta muito interessante de formalização: logo utilizaremos a Indução Matemática. Esse método moderno, elegante e prático, provará que a fórmula não apenas funciona para os casos que vimos, mas é uma ferramenta robusta, aplicável a polígonos com qualquer número de lados, por maior que seja.

A indução matemática como consolidação da fórmula

Para iniciar o processo da consolidação da fórmula, citaremos Morgado (p.16) que afirma "O método da indução não é somente um método de demonstração: ele é também um método para construir definições".

A opção por apresentar a indução matemática apenas após a construção geométrica não é casual, mas reflete uma escolha pedagógica alinhada à prática em sala de aula.

Assim, faremos a prova pela construção da definição, utilizando os resultados já desenvolvidos anteriormente, agora com um método formal e cientificamente aceito, a fim de consolidar a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo, mas colocando um pouco de didática no meio, para explicar o que está ocorrendo para um leitor não tão acostumado às ferramentas matemáticas.

Vamos provar que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo com $n \geq 3$ lados é dada pela fórmula: $S_n = (n-2) \cdot 180°$, em que n representa o número de lados do polígono.

Caso base: Para $n = 3$ temos um triângulo. Logo,

$$S_3 = (3-2) \cdot 180° \Leftrightarrow S_3 = 1 \cdot 180° \Leftrightarrow S_3 = 180°$$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o caso base está verificado, e é uma verdade, o que garante nossa progressão para o próximo passo.

Hipótese de indução: Supondo que seja verdade a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo dada por $S_n = (n-2) \cdot 180°$, para $n \geq 3$ lados, vamos para a tese.

Tese: que é o passo indutivo, queremos provar que a fórmula é válida para $(n+1)$ lados. Aqui, para os não habituados com a linguagem matemática, é como se acrescentássemos mais um lado num polígono convexo qualquer, e, se isso for verdade, então será verdade para qualquer polígono convexo. Substituindo na hipótese de indução:

#1 $$S_{n+1} = (n+1-2) \cdot 180° \Leftrightarrow S_{n+1} = (n-1) \cdot 180°$$

Vamos ilustrar para melhor entender o que está acontecendo e assim dar um sentido para esta expressão matemática, cito isso, para não confundir com uma nova fórmula, e sim uma expressão que significa que temos um novo polígono com mais lados, por isso nossa fórmula está "diferente".

Graficamente, é como se tivéssemos feito o seguinte: acrescentar um vértice em qualquer posição externa do polígono dado, assim o polígono ganhará mais um lado, observe as duas figuras a seguir 12 e 13:

Figura 12 - Polígono de n lados

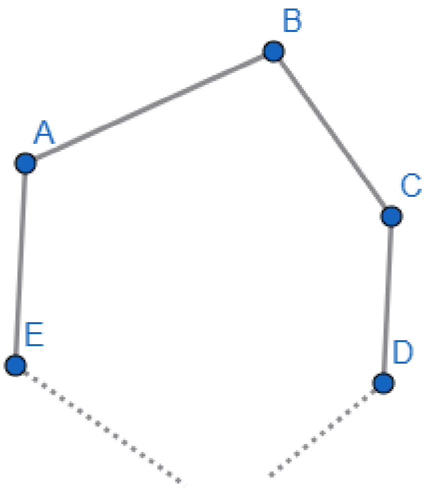
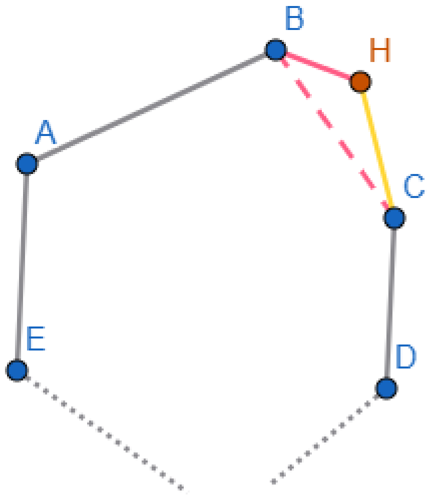


Figura 13 - Polígono de n+1 lados



Para melhor compreensão, consideremos um polígono convexo de n lados e acrescentemos um novo vértice em qualquer posição entre dois vértices consecutivos, por exemplo, entre os vértices B e C. Dessa forma, o lado $\overline{BC}$ é substituído pelos lados $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$ fazendo com que o polígono passe a ter $n + 1$ lados.

Observe que essa modificação cria o triângulo BHC, cuja soma dos ângulos internos é $180°$. Assim, a soma dos ângulos internos do novo polígono pode ser escrita como:

$$S_{n+1} = S_n + 180°$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos:

#2 $S_{n+1} = (n - 2) \cdot 180° + 180° \Leftrightarrow S_{n+1} = 180° \cdot (n - 2 + 1) \Leftrightarrow$
$S_{n+1} = (n - 1) \cdot 180°$

Perceba que a expressão encontrada em **#2** coincide com a expressão em **#1**, confirmando a tese.

Portanto, pelo princípio da indução matemática, concluímos que, para todo $n \geq 3$, com $n \in \mathbb{N}$[1], a soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por:

$$S_n = (n-2) \cdot 180°. \blacksquare$$

Considerações finais

Olhando como um simples leitor curioso, estudante ou mesmo como um professor experiente, somos naturalmente conduzidos à beleza da lógica, do método e do raciocínio. E, por que não dizer, como é legal a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo? É difícil não se enamorar por ela. Inúmeros problemas são criados a partir de uma fórmula que muitas das vezes é só mais uma das inúmeras decoradas, mas por que não demonstrar, construir e até inferir uma lógica clara quando se trata de um ensino mais avançado?

Enquanto me aprimorava no IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) assisti a uma aula do saudoso professor e autor Elon Lages Lima, que falava: *"O estudante merece saber de onde vem a fórmula de Bháskara!"*, na época, ele demonstrou de forma brilhante todos os passos da dedução da fórmula. O que para muitos docentes pareceu absurdo, foi encantador para mim, afinal, ele tinha razão: ensinar o que está pronto e exigir que se decore não desenvolve o pensamento crítico, apenas privilegia os que possuem uma boa memória.

Fica, então, o desafio de explorar mais fórmulas "legais". Aprimorar, levar à construção, dar um sentido à existência de um conhecimento matemático é mais natural do que simplesmente gravar letras em uma ordem sem significado para um exame. Sejamos, enquanto educadores, tão legais e interessantes quanto à fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo. Afinal, enquanto educadores, somos muito mais do que aquilo que pedimos que nossos alunos decorem.

[1] $\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais.

Referências bibliográficas

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular: educação infantil e ensino fundamental*. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

EUCLIDES. *Elementos de geometria*. Tradução de Frederico Commandino. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo; MACHADO, Antônio. *Geometria plana: conceitos básicos*. 2ª. ed. São Paulo: Atual, 2010.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática discreta*. 4ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2023.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Geometria*. 2ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.