REVISTA EnsinE

O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA NO ESTUDO DO CÁLCULO

Leonardo de Carvalho*

Resumo: Nesse artigo discute-se a importância do uso da informática para o estudo do Cálculo no Ensino Superior, onde temos um breve histórico da evolução da matemática do período considerado moderno, definições importantes aplicados ao cálculo para o entendimento do leitor, um problema prático do uso do Cálculo em Administração, uma breve discussão das resolução desse problema com e sem o uso do Geogebra, concluindo a análise após a resolução do problema.
Palavras-chave: Ensino Superior, Cálculo, Geogebra.

Abstract: This article discusses the importance of using information technology for the study of Calculus in Higher Education. It includes a brief history of the evolution of mathematics during the modern period, important definitions applied to calculus for the reader's understanding, a practical problem of using Calculus in Administration, a brief discussion of solving this problem with and without the use of Geogebra and concludes the analysis after solving the problem.
Keywords: Higher Education, Calculus, Geogebra.

Introdução

O estudo do Cálculo vem como grande vilão das Faculdades Exatas, onde muitos sofrem devido aos estudos matemáticos do Ensino Fundamental não estarem completamente construídos, ou por muitos estudantes não perceberem que regras simples da álgebra devem ser empregadas em vários momentos nas resoluções, gerando um distanciamento e muitas frustações por parte destes com notas baixas, reprovações e muitas desistências.

Algumas frases expressas por estudantes nesse período chegam a divertir: “Cálculo não é de Deus.”, “O professor gosta de torturar e se vangloria por reprovar.”, “Esse professor não tem família, pra ter tempo e inventar uma avaliação dessas.” – corriqueiramente estas e outras expressões de lamúria chegam até o especialista da área, gerando um falso poder e a impressão de que há uma conspiração contra os estudantes de Cálculo, o que não é verdade, afinal, criar uma Universidade apenas para Professores

* Licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Petrópolis – UCP. Pós-graduado em Metodologias do Ensino da Matemática – FAVENI. Pós-graduado em Docência do Ensino Superior – FAVENI. Mestrando do PROFMAT – Mestrado Profissional de Matemática – PUC-RJ.

não é uma atitude rica e inspiradora para Educadores, embora um pouco de rigor não seja ruim para o crescimento intelectual de uma comunidade.

Os livros e textos em Matemática são trabalhosos, pois é necessário sempre um bloco de anotações e um lápis ao lado, para testar suas conjecturas, comprovar as ideias e até reinventar os caminhos, o que não é uma leitura fácil e requer tempo, concentração, persistência - fatores importantes para um bom aproveitamento das leituras. Não será diferente neste texto, então prepare o seu bloco de anotações, lápis e um acesso à computador ou smartphone com internet para uso do software Geogebra® que exploraremos durante a resolução de um problema proposto, onde pelos gráficos gerados a resolução do problema será demonstrado de uma forma mais visual, não apenas abstrato com suas soluções clássicas.

Logo, o texto navega pela importância do período histórico do desenvolvimento da matemática, pelo problema proposto e suas resoluções clássicas e pela resolução com o auxílio do Geogebra, concluindo o pensamento após toda a análise descrita.

A importância do período histórico

Os recursos da informática vêm para o Ensino Superior, não mais como um coadjuvante, mas como aprimorador dessas Teorias do Cálculo que surgiram gradativamente, e, segundo Thiel, dentro do período entre os séculos XVI e XVII, que é o período Moderno da Matemática.

> Neste período podemos destacar François Viète (França, 1540 – 1603) que começou a usar letras para representar quantidades desconhecidas (incógnitas), Galileu Galilei (Itália, 1564 – 1642), por meio de instrumentos de medidas aprimorados em suas experiências propôs os métodos de representação em curvas, expressando relações funcionais em palavras e em linguagem de proporção. René Descartes (França, 1596 – 1650) introduz o conceito de função em sua obra "Lá Geométrie". Pierre de Fermat (França, 1601 – 1665) apresentou o conceito de trabalhar com curvas de segundo grau. (...) Isaac Newton (Inglaterra, 1643 – 1727) e Goltfried Leibniz (Alemanha, 1646 – 1716) conceberam o Cálculo Diferencial e Integral, que contou com contribuições posteriores de Joseph Louis Lagrange (Itália, 1736 – 1813).

E como a Matemática deu saltos após estudos como os citados acima, chegamos a um momento que as produções surgem em trabalhos, comunidades acadêmicas, projetos de Olimpíadas (OBMEP, Canguru, etc.), comunidades de software (sim, existe uma comunidade do Geogebra, por exemplo, criada dentro do software).

Toda esta dinâmica chega graças ao auxílio da Informática e Internet, que estreitam laços, encurtam distâncias e instigam as mentes pensantes a inventar, explorar e compartilhar ideias por todos os lugares.

Segundo Silva (2000), o professor passa a ter um novo desafio, que é o de transformar a comunicação no sentido da participação-intervenção, por meio de recursos tecnológicos. Isso reflete em criar com tecnologia, inovação e criatividade na Gestão Acadêmica.

Definições importantes para o entendimento do leitor

Primeiro precisa-se definir o que é uma Função Marginal para apresentar o problema. Segundo Morettin:

> Em Economia e Administração, dada uma função f(x), costuma-se utilizar o conceito de função marginal para avaliar o efeito causado em f(x) por uma pequena variação de x. Chama-se função marginal de f(x) à função derivada de f(x). Assim, a função custo marginal é a derivada da função custo, a função receita marginal é a derivada da função receita e, assim por diante.

Então a Função Marginal existirá após aplicar a derivada de uma função. Como o problema que será apresentado fala sobre Custo Marginal ($C_{mg}(x)$), então utilizaremos que $C_{mg}(x)$ é a derivada de $C(x)$, ou utilizando a notação de Lagrange, $C'(x)$.

Agora, como um pequeno laboratório, utiliza-se o exemplo em Morettin para melhor fazer o entendimento. Uma recomendação é pegar aquele bloco de notas para o acompanhamento: Sendo $C(x)$ a função custo de produção de x unidades de um produto.

Consideremos a função custo $C(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}5x^2 + 300x + 100$.

O custo marginal será igual a expressão da derivada da função custo:

$$C_{mg}(x) = C'(x) = 3 \cdot 0{,}01x^{3-1} - 2 \cdot 0{,}5 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 300 \cdot x^{1-1} + 0$$

$$C_{mg}(x) = C'(x) = 0{,}03 \cdot x^2 - x + 300$$

Se quisermos o custo marginal para x = 5 unidades, obteremos:

$$C_{mg}(5) = C'(5) = 0{,}03(5)^2 - (5) + 300$$

$$C_{mg}(5) = C'(5) = 0{,}03 \cdot 25 - (5) + 300$$

$$C_{mg}(5) = C'(5) = 0{,}03 \cdot 25 - (5) + 300$$

$$C_{mg}(5) = C'(5) = 295{,}75$$

Esse resultado pode ser interpretado como:

$$C_{mg}(x) = C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

Logo: $C_{mg}(x) = C'(x) \cong \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}, para\ \Delta x\ um\ valor\ pequeno$

Frequentemente esse $\Delta x = 1$, pois verifica-se o aumento em uma unidade de produção, para ver a diferença (variação) do custo após a produção para mais uma unidade a partir de x unidades.

$$C_{mg}(x) = C'(x) \cong \Delta C = C(x+1) - C(x)$$

Pelo valor do exemplo acima fica-se: $C_{mg}(5) = 295{,}75$, representa aproximadamente a diferença: $C(6) - C(5)$, que é a produção da 6ª unidade. Olhe para a verificação:

- $C(6) = 0{,}01(6)^3 - 0{,}5(6)^2 + 300(6) + 100$

  $C(6) = 1884{,}16$

- $C(5) = 0{,}01(5)^3 - 0{,}5(5)^2 + 300(5) + 100$

  $C(5) = 1588{,}75$

- $C(6) - C(5) = 1884{,}16 - 1588{,}75 = 295{,}41$

- $C_{mg}(5) = \mathbf{295},75 \quad \cong \quad C(6) - C(5) = \mathbf{295},41$

Problema prático do Cálculo na Administração

O problema abaixo, encontra uma funcionabilidade da função custo marginal, sua resolução será enriquecida com os gráficos no software Geogebra após a solução formal, clássica ou tradicional, como melhor convém.

Em uma fábrica no centro industrial o Engenheiro de Produção modelou a função custo de produção de um item produzido, segundo a função:

$$C(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 200$$

Calcule o que for pedido, interpretando os resultados, quando for possível.

a) A função do custo marginal, utilizando a notação $C_{mg}(x)$;
b) Calcule $C_{mg}(10)$ em dólares (US$) utilizando a derivada no ponto $x = 10$;
c) Demonstre o resultado da letra b aplicando $\Delta C = C(x+1) - C(x)$;
d) Calcule o erro encontrado entre os resultados da letra b e da letra c.

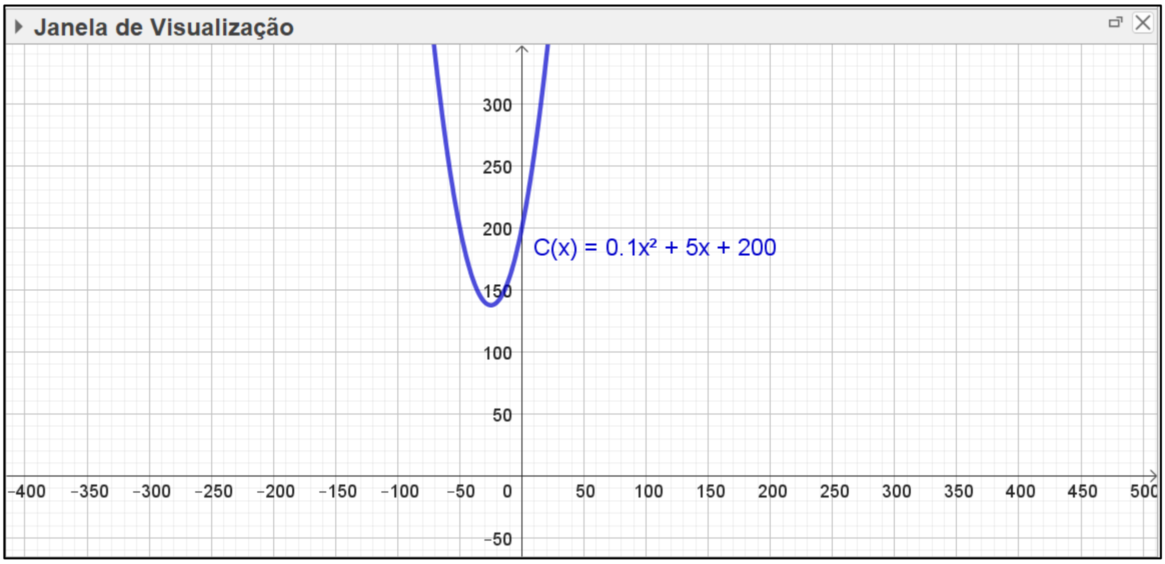
Resolução:

a) A função do custo marginal, utilizando a notação $C_{mg}(x)$;

Como no exemplo anterior: $C_{mg}(x) = C'(x)$.

$$C_{mg}(x) = 0{,}2x + 5$$

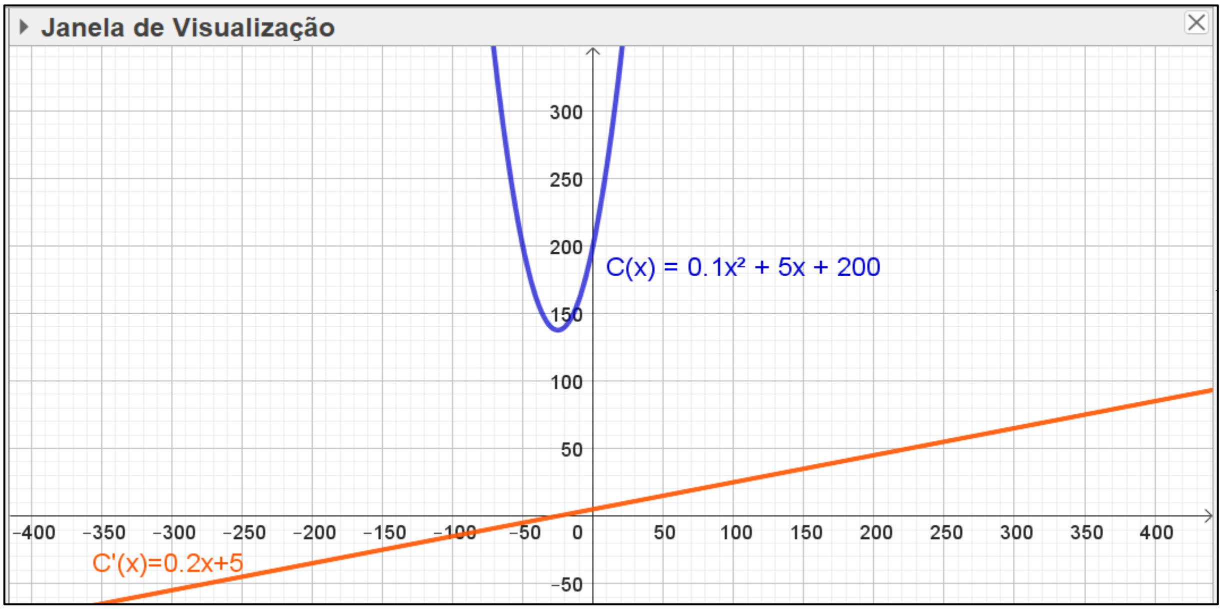
Aqui há o quebra do paradigma, apenas com a regra dita, sem notar o que está realmente acontecendo. Então verifiquemos o gráfico:



Comportamento do Gráfico da função custo fig.1

Revista ENSINE, Juiz de Fora, v. 03, n. 01, pp. 53-60, jan.-jun., 2025
https://journal.ensin-e.edu.br/rensine

Agora inserindo a função derivada no programa, note o que ocorre:



Comportamento do Gráfico da função custo derivada fig. 2

A função Custo C(x) era uma função quadrática, gerando uma parábola (fig. 1) e após o processo de derivação, encontra-se a função C'(x) que é uma função do 1º grau, derivada da função do segundo grau (fig. 2), gerando assim uma reta no gráfico.

a) Calcule $C_{mg}(10)$ em dólares (US$) utilizando a derivada no ponto $x = 10$;

$$C_{mg}(10) = 0{,}2 \cdot 10 + 5$$

$$C_{mg}(10) = 7$$

R: Ao fabricar a 11ª unidade o custo será de aproximadamente US$ 7,00.

b) Demonstre o resultado da letra b aplicando $\Delta C = C(x+1) - C(x)$;

$$C(11) = 0{,}1 \cdot (11)^2 + 5 \cdot (11) + 200$$

$$C(11) = 267{,}10$$

$$C(10) = 0{,}1 \cdot (10)^2 + 5 \cdot (10) + 200$$

$$C(10) = 260{,}00$$

$$C(11) - C(10) = 267{,}10 - 260{,}00 = 7{,}10$$

R: Ao fabricar a 11ª unidade o custo será de aproximadamente US$ 7,10.

c) Calcule o erro encontrado entre os resultados da letra b e da letra c.

$$|7{,}10 - 7{,}00| = 0{,}10$$

R: Existe um erro de US$ 0,10.

Conclusão

Primeiro conclui-se que a derivada: $C'(x)$ da função Custo: $C(x)$ atende de forma satisfatória o valor do custo da produção em mais uma unidade, podendo ser aplicada em demais cálculos da Administração, como Receita e Lucro com garantia de sucesso na tomada de decisão em um problema de administração.

Segundo, pode-se observar que o uso do software Geogebra ajuda a enfatizar o que é ensinado no curso de Cálculo, demonstrando o comportamento da função primitiva: $C(x) = 0{,}1x^2 + 5x + 200$, que é uma função quadrática e cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima e o comportamento da função derivada Custo Marginal:$C_{mg}(x) = 0{,}2x + 5$, que é uma reta crescente, confirmando o que é sabido no estudo do Cálculo, segundo Stewart, que a Regra da Potência (Versão Geral): Se n for um número real qualquer, então, na notação de Leibniz, temos: $\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$, ou seja, reduz-se um grau aplicando a regra acima, o que muda o comportamento da função, podendo tornar o cálculo mais prático com a sabedoria dessa lei e o entendimento gráfico das funções, ensinando com o uso de um software gratuito, intuitivo, rico em ferramentas e dinâmico.

Bibliografia

MORETTIN, Pedro A e outros. Cálculo funções de uma e várias variáveis. São Paulo: Saraiva 2005.

RUSSO, Caroline Lourenço. A simbologia na história do Cálculo. São Paulo: Trabalho de Conclusão de Curso Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia, 2017. Disponível em: https://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/118724/mod_resource/content/0/TrabalhodeConclus%C3%A3odeCurso_CarolineLourencoRusso.pdf . Acesso em 28 de dezembro 2024.

SILVA, Marco. Sala de aula interativa. Rio de Janeiro: Quartet, 2000.

STEWART, James. Cálculo Volume I – 5ª edição – São Paulo: Thomson Learning, 2008.

THIEL, Afrânio Austregésilo e outro. O cálculo e a matemática superior: algumas aplicações. Blumenau: Instituto Federal Catarinense, 2016.